修 士 学 位 論 文

題名：細い領域上での advection 効果を持つ 2 種の Lotka-Volterra 競争系について

指導教授　倉田　和浩　教授

平成 29 年　1 月 10 日　提出

首都大学東京　大学院
理工学研究科　数理情報科学専攻
学修番号 15878325

吉田　遼

目次

1　問題設定と主定理

反応拡散方程式とは放物型偏微分方程式の一種であり, 反応効果と拡散効果を同時に進行している系が時間発展する過程を記述する. 反応拡散方程式またはそれを連立させた反応拡散方程式系は自然科学の色々な分野にみられる現象のモデル方程式となる. 本論文では Lotka-Volterra 方程式という 2 種の生物種が水中の流れの中にあるような, 移流効果を持つ生態系のダイナミクスの数理モデルを扱い, 数学的な側面での考察を 2016 年に Lou, Xiao, Zhao らによって研究された [4] と類似した設定のもと行う. 流れのある状況のもと, 水柱に生息する 2 種類の生物個体群を考える. 変数 x は水柱の深さを表し, $x=0$ を水面, $x=L$ を水底とする. $u(x,t), v(x,t)$ は位置 x, 時刻 t における個体数を表す. また正の定数 D を拡散率といい, 正の定数 r を内的増加率という. また α, β を移流率という. 特に $\mathbb{R}^2$ 内の領域として $\Omega_\varepsilon := \{(x,y); 0<x<L,\ 0<y<\varepsilon d(x)\}$ を考え $\varepsilon \to 0$ とすると領域 Ω_ε は線分 $[0,L]$ に近づくことが分かる. この 2 次元領域上での数理モデルの $\varepsilon \to 0$ での極限として現れる空間不均一な空間 1 次元数理モデルを考える. この場合の反応拡散方程式系は以下の通りである. ([8] 参照)

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{D_1}{d(x)}(d(x)u_x)_x - \alpha u_x + u(r-u-v), \quad x \in (0,L), t>0, \\ v_t = \dfrac{D_2}{d(x)}(d(x)v_x)_x - \beta v_x + v(r-u-v), \quad x \in (0,L), t>0, \\ D_1 u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = D_1 u_x(L,t) - \alpha u(L,t) = 0, \quad t>0, \\ D_2 v_x(0,t) - \beta v(0,t) = D_2 v_x(L,t) - \beta v(L,t) = 0, \quad t>0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq, \not\equiv 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq, \not\equiv 0, \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{1}$$

2016 年に Lou, Xiao, Zhao らによって研究された [4] では, (1) において $d(x) \equiv 1$, 「$D_1 = D_2$ かつ $\alpha \neq \beta$」の場合を扱い次の結果が得られている. $0=\alpha<\beta$ のとき $(\widetilde{u},0)=(r,0)$ は大域的漸近安定であることが示されている. これは拡散効果のみ受ける生物種は, 拡散効果と移流効果を受ける生物種との競争に勝つことを意味する. $0<\alpha<\beta$ のとき $(\widetilde{u},0)$ は大域的漸近安定であることが示されている. これは, 移流効果の影響が低い生物種の方が競争に勝つことを意味する. また $\alpha<0<\beta$ のとき局所的に安定な共存状態が存在することが分かっている. このことは 2 種は反対方向に移動するので共存することを意味する. 一方で 2016 年に Zhao, Zhou が行った研究 [9] では $d(x) \equiv 1$,「$D_1 \neq D_2$ かつ $\alpha = 0$」の条件に加え, 正の定数 r を位置 x の影響を受ける $r(x)$ にした場合が研究されている. 特に $r'(x) \leq, \not\equiv 0$ のとき任意の $\beta>0$ に対し $(\widetilde{u},0)$ は大域的漸近安定であることが示されている. 仮定 $r'(x) \leq, \not\equiv 0$ は $x=0$ の付近の方が $x=L$ の付近より環境が良いことを表す. これらのことは移流効果を受ける生物種の方は好ましくない環境に移動し, 移流効果を受けない生物種は好ましい環境に居続けることから, 移流効果を受けない生物種が競争に勝つことを意味する. 本論文では

(1) において

$$D_1 = D_2,\ \alpha = 0$$

の場合を考察する. このとき (1) は $D_1 = D_2 = D$, $0 = \alpha < \beta$ として次のように表すことができる.

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{D}{d(x)}(d(x)u_x)_x + u(r-u-v), \quad x \in (0,L), t > 0, \\ v_t = \dfrac{D}{d(x)}(d(x)v_x)_x - \beta v_x + v(r-u-v), \quad x \in (0,L), t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ Dv_x(0,t) - \beta v(0,t) = Dv_x(L,t) - \beta v(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq, \not\equiv 0,\ v(x,0) = v_0(x) \geq, \not\equiv 0, \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{2}$$

(2) では v が移流効果を持ち, u が移流効果を持たないことを意味する. $\widetilde{u}(x) > 0$, $\widetilde{v}(x) > 0$ であるような (2) の定常解 $(\widetilde{u}, 0)$, $(0, \widetilde{v})$ を (2) の semi-trivial steady states という (そのような解の存在非存在を後で述べる). また $u^*(x) > 0$, $v^*(x) > 0$ であるような co-existence steady state (u^*, v^*)（以下共存状態という）を (2) の定常問題が解として持つかどうかは, 興味深い問題である. さらに $d(x)$ に関し次のように仮定をする:
(d1) $d(x)$ は定数でない (d2) $d(x) > 0$ (d3) $d \in C^1([0,L])$
また本論文での議論にあたり次を定義する.

$$\delta_1 := \min_{0 \leq x \leq L} \left(-\frac{d_x(x)}{d(x)} \right),\ \delta_2 := \max_{0 \leq x \leq L} \left(-\frac{d_x(x)}{d(x)} \right)$$

上のような仮定, 定義のもと得られた主定理は以下の 3 つである. (2) の semi-trivial steady states の存在非存在についての結果は以下の通りである.

主定理 1.1. (i) (2) の semi-trivial steady states $(\widetilde{u}, 0) = (r, 0)$ は唯一つ存在する. (ii) β が十分に小さいとき (2) の semi-trivial steady states $(0, \widetilde{v})$ は唯一つ存在する. (iii) $d_x(x) \leq, \not\equiv 0, (x \in [0,L])$ かつ $\delta_1 > 0$ とする. $\beta > \dfrac{r}{\delta_1}$ のとき $(0, \widetilde{v})$ は存在しない.

(2) の semi-trivial steady states の安定性, 不安定性については以下が成り立つ.

主定理 1.2. (i) $d_x(x) \leq, \not\equiv 0, (x \in [0,L])$ のとき任意の $\beta > 0$ に対して $(\widetilde{u}, 0)$ は安定である.(ii) $d_x(x) \leq, \not\equiv 0, (x \in [0,L])$ のとき十分小さい $\beta > 0$ に対して $(0, \widetilde{v})$ は不安定である.

最後に 2 種類の生物種の共存状態については以下の非存在定理が成り立つ.

主定理 1.3. $d_x(x) \leq, \not\equiv 0, (x \in [0,L])$ とする. また $\left(\dfrac{d_x(x)}{d(x)} \right)_x \leq 0,\ (x \in [0,L])$ かつ $\delta_2 < \dfrac{4\beta}{D}$ という条件を満たすとする. このとき共存状態は存在しない.

2016 年に Lou, Xiao, Zhao らによって研究された [4] では, $0 = \alpha < \beta$ のとき $(\widetilde{u}, 0)$ が安定, $(0, \widetilde{v})$ が不安定, かつ共存状態が存在しないことが示されている. さらに 1995 年に Smith によって研究された [3], [7] monotone dynamical system により $(\widetilde{u}, 0)$ は大域的漸近安定であることが示されている. 2016 年に Zhao, Zhou らによって研究された [9] では, $0 = \alpha < \beta$ かつ $r'(x) \leq, \not\equiv 0$ のとき $(\widetilde{u}, 0)$ が安定, $(0, \widetilde{v})$ が不安定, かつ共存状態が存在しないことが示されていて [3], [7] の monotone dynamical system により $(\widetilde{u}, 0)$ は大域的漸近安定であることが示されている. 本論文では $\beta > 0$ が十分大きいとき $(\widetilde{u}, 0)$ は安定であり $(0, \widetilde{v})$ は存在しない. また共存状態は存在しないので [3], [7] monotone dynamical system により $(\widetilde{u}, 0)$ は大域的漸近安定であることが予想される. しかし $d_x(x) \leq, \not\equiv 0$ の状況は, $r'(x) \leq, \not\equiv 0$ の状況と類似していると考えられるため, 上記の結果は妥当なものと言える.

2 準備・予備知識

2.1 一般的な予備知識

次のように作用素 A を定める. $d(x), q(x) > 0$, $d, q \in C^1([0, L])$, $m \in L^\infty(0, L)$ に対して,

$$A\phi = -\frac{1}{d(x)}[q(x)\phi_x]_x - m(x)\phi.$$

補題 2.1. A を固有値がすべて正の作用素とする. このとき任意の $f \in L^2([0, L])$ に対し

$$\begin{cases} A\varphi = f, \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0. \end{cases}$$

なる $\varphi \in H^2(0, L)$ が存在する.

補題 2.2 (有界列の弱コンパクト性 [1])**.** *]* ヒルベルト空間 H の任意の有界列 $\{u_n\}$ は弱収束する部分列をもつ. すなわち, ある $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ とある u^* が存在して,

$$u_{n_k} \to u^* \text{ weakly in } H.$$

補題 2.3. ある β_0 とある正の定数 M が存在して, $||v_\beta||_{H^1([0,L])} \leq M$ $(0 \leq \beta \leq \beta_0)$ とする. このとき, ある $w \in H^1([0, L])$ が存在し, 任意の部分列 $\{v_{\beta_j}\} \subset \{v_\beta\}$ に対して, ある $\{v_{\beta'_j}\} \subset \{v_{\beta_j}\}$ で, $v_{\beta'_j} \to w$ in $H^1([0, L])$ を満たすものが存在するならば,

$$v_\beta \to w \text{ in } H^1([0, L]).$$

証明. 背理法で示す. そうでないとすると, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し, ある $\beta_j \geq j$ が存在し,

$$||v_{\beta_j} - w||_{H^1([0,L])} \geq \varepsilon_0. \tag{3}$$

が成り立つ. ゆえに (3) より

$$||v_{\beta'_j} - w||_{H^1([0,L])} \geq \varepsilon_0.$$

を得る. これは $v_{\beta'_j} \to w$ in $H^1([0,L])$ に矛盾する. $\square$

2.2 本論文での準備

(2) の semi-trivial steady state を述べるために次の単独方程式を考える. すなわち任意の $\gamma \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{cases} w_t = \dfrac{D}{d(x)}(d(x)w_x)_x - \gamma w_x + w(r-w), & x \in (0,L), t > 0, \\ Dw_x(0,t) - \gamma w(0,t) = Dw_x(L,t) - \gamma w(L,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4}$$

を考える. また (4) の定常解の存在を示すために

$$\begin{cases} \dfrac{D}{d(x)}(d(x)w_x)_x - \gamma w_x + w(r-w) = 0, & x \in (0,L), \\ Dw_x(0) - \gamma w(0) = Dw_x(L) - \gamma w(L) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

を考える. ここで $w(x,t) := \exp\left(\dfrac{\gamma}{D}x\right) z(x,t)$ とし, $p(x) = \exp\left(\dfrac{\gamma}{D}x\right)$ とおくと

$$Dw_x - \gamma w = Dp(x)z_x,$$

であるから単独方程式の問題は次のような重み付きノイマン境界値問題を考えることに帰着できる. (4),(5) より

$$\begin{cases} p(x)z_t = \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)z_x\right]_x + p(x)z\left\{\left(r + \gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z\right\}, \\ z_x(0,t) = z_x(L,t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)z_x\right]_x + p(x)z\left\{\left(r + \gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z\right\} = 0, \\ z_x(0) = z_x(L) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

を考えていく.

定義 2.4. $\overline{z} \in C^2(0,L) \cap C^1[0,L]$ は単独方程式 (7) に対し次を満たすとき supersolution であるという.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)\overline{z}_x\right]_x + p(x)\overline{z}\left\{\left(r + \gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)\overline{z}\right\} \leq 0, & x \in (0,L) \\ \overline{z}_x(0) \leq 0, \\ \overline{z}_x(L) \geq 0. \end{cases}$$

定義 2.5. $\underline{z} \in C^2(0,L) \cap C^1[0,L]$ は単独方程式 (7) に対し次を満たすとき subsolution であるという.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)\underline{z}_x\right]_x + p(x)\underline{z}\left\{\left(r + \gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)\underline{z}\right\} \geq 0, \quad x \in (0,L) \\ \underline{z}_x(0) \geq 0, \\ \underline{z}_x(L) \leq 0. \end{cases}$$

補題 2.6. (7) の supersolution $\overline{z}(x)$ と subsolution $\underline{z}(x)$ が存在し,

$$\underline{z}(x) \leq \overline{z}(x), \quad x \in (0,L)$$

とする, このとき

$$\underline{z}(x) \leq \widetilde{z}(x) \leq \overline{z}(x), \quad x \in (0,L)$$

を満たす (7) の解 $\widetilde{z}(x)$ で最大解 $Z_1(x)$ 最小解 $Z_2(x)$ が存在する. すなわち $\underline{z}(x) \leq \widetilde{z}(x) \leq \overline{z}(x)$ なる任意の解 $\widetilde{z}(x)$ に対して

$$Z_2(x) \leq \widetilde{z}(x) \leq Z_1(x)$$

が成り立つ.

証明は 1971 年に Sattinger によって研究された [6] を参照する. (4) における線形化固有値問題を考えることは (6) における線形化固有値問題を考えればよい. 次の補題を与える. ここで [5] より第一固有関数には正値性があることを認める.

補題 2.7. $\displaystyle\int_0^L \Big(\gamma d_x + rd(x)\Big)\exp(\frac{\gamma}{D}x)dx > 0$, ならば (6) の零解は線形不安定である. すなわち $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ である.

証明. 先と同様に $p(x) = \exp(\dfrac{\gamma}{D}x)$ とおき, $m(x) = r + \gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}$ とおく. また十分小な $\varphi \in H^1([0,L])$ に対して $z(x,t) = \varphi(x)\exp(-\lambda t)$ とおく. このとき (6) より

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)\varphi_x\right]_x + m(x)p(x)\varphi(x) = -\lambda p(x)\varphi(x), \quad x \in (0,L) \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

を得る. ここで (6) の零解のまわりの線形化固有値問題とは, (8) を満たす λ と $\varphi \not\equiv 0$ を見つける問題である. 第一固有値, 第一固有関数のペア (λ_1, φ_1) は (8) を満たすので

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)\varphi_{1_x}\right]_x + m(x)p(x)\varphi_1(x) = -\lambda_1 p(x)\varphi_1(x), \quad x \in (0,L), \\ \varphi_{1_x}(0) = \varphi_{1_x}(L) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

を得る. ここで [5] より $\varphi_1(x)>0$ であることに注意する. (9) に $d(x)$ をかけ φ_1 で割って区間 $[0,L]$ で積分すると

$$\int_0^L \frac{[Dd(x)p(x)\varphi_{1_x}]_x}{\varphi_1}dx+\int_0^L m(x)d(x)p(x)dx=-\lambda_1\int_0^L d(x)p(x)dx.$$

である. ゆえに次を得る.

$$\int_0^L \frac{Dd(x)p(x)\varphi_{1_x}^2}{\varphi_1^2}dx+\int_0^L\Big(\gamma d_x+rd(x)\Big)p(x)dx=-\lambda_1\int_0^L d(x)p(x)dx. \tag{10}$$

よって

$$\int_0^L \frac{Dd(x)p(x)(\varphi_{1_x})^2}{\varphi_1^2}dx\geq 0,\quad \int_0^L d(x)p(x)dx>0$$

かつ **補題 2.7** の仮定より

$$\int_0^L\Big(\gamma d_x+rd(x)\Big)p(x)dx>0$$

であるから (10) より $\lambda_1<0$ である.[8] より固有値は全て実数であり, $\mathrm{Re}(\lambda)=\lambda_1<0$ を得る. これは (6) の零解は線形不安定であることを意味する. □

注 2.8. (8) より第一固有値を特徴づけすると次のようになる.

$$\lambda_1=\inf_{\substack{\varphi\in H^1([0,L])\\ \varphi\not\equiv 0}}\left\{\frac{D\int_0^L d(x)\varphi_x^2\exp\left(\frac{\gamma}{D}x\right)dx-\int_0^L(\gamma d_x+rd(x))\exp\left(\frac{\gamma}{D}x\right)\varphi^2dx}{\int_0^L d(x)\exp\left(\frac{\gamma}{D}x\right)\varphi^2dx}\right\}.$$

補題 2.9. (6) の零解が線形不安定ならば (6) は正値定常解 $\tilde{z}(x)$ を持ち, それは一意である.

証明. $p(x)=\exp\left(\dfrac{\gamma}{D}x\right)$ とおく.(7) に対し $M>\displaystyle\max_{0\leq x\leq L}\left(r+\gamma\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)$ なる $M>0$ と十分小さい $\varepsilon>0$ に対して

$$\overline{z}(x)=M,\ \underline{z}(x)=\varepsilon\varphi_1(x).$$

とおく. ただし $\varphi_1(x)>0$ は $\lambda_1<0$ に対応する第一固有関数である. このとき $p(x)M>M>\left(r+\gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right)$ かつ $\overline{z}_x(x)=0$ である. また (8) より

$$p(x)M\left\{\left(r+\gamma\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)-p(x)M\right\}\leq 0,\ \overline{z}_x(0)\leq 0,\ \overline{z}_x(L)\geq 0.$$

であるから $\overline{z}(x)$ は supersolution である. また **補題 2.7** より第一固有値 $\lambda_1<0$ であるから (9) より

$$-\lambda_1\varphi_1^2(x)\geq 0,\ \underline{z}_x(0)\geq 0,\ \underline{z}_x(L)\leq 0.$$

であるから $\underline{z}(x)$ は subsolution である. ゆえに **補題 2.6** より定常解 $\widetilde{z}(x)$ が存在し

$$0 < \underline{z}(x) < \widetilde{z}(x) < \overline{z}(x),$$

を満たすから $\widetilde{z}(x)$ の正値性が示される. 次に正値定常解 $\widetilde{z}(x)$ が一意であることを示す. (6) が二つの正値解 $v_1(x), v_2(x)$ が存在していると仮定し $z_1(x) \equiv z_2(x)$ であることを示す. $\varepsilon > 0$ は十分小さいので

$$\varepsilon \max_{0\le x\le L} \varphi_1(x) \le \min_{0\le x\le L} z_1(x), \quad \varepsilon \max_{0\le x\le L} \varphi_1(x) \le \min_{0\le x\le L} z_2(x)$$

より $M > \max\{z_1(x), z_2(x), r + \gamma \dfrac{d_x(x)}{d(x)}\}$ とおくと

$$\begin{aligned}\underline{z}(x) = \varepsilon\varphi_1(x) \le z_1(x) \le M = \overline{z}(x),\\ \underline{z}(x) = \varepsilon\varphi_1(x) \le z_2(x) \le M = \overline{z}(x)\end{aligned}$$

を得る. ゆえに **補題 2.6** より (6) の最大解 $Z_1(x)$ が存在して,

$$0 < z_2(x) \le Z_1(x), \quad 0 < z_1(x) \le Z_1(x)$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{cases}\dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)z_{1_x}(x)\right]_x + p(x)z_1(x)\left\{\left(r + \gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z_1(x)\right\} = 0,\\ z_{1_x}(0) = z_{1_x}(L) = 0.\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)Z_{1_x}(x)\right]_x + p(x)Z_1(x)\left\{\left(r + \gamma\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)Z_1(x)\right\} = 0,\\ Z_{1_x}(0) = Z_{1_x}(L) = 0.\end{cases} \tag{12}$$

(11) の式に $Z_1(x)$ をかけた式から (12) の式に $z_1(x)$ をかけた式を引き区間 $[0, L]$ で積分すると次を得る.

$$\int_0^L d(x)p(x)z_1(x)Z_1(x)\left(z_1(x) - Z_1(x)\right)dx = 0,$$

したがって $z_1(x) = Z_1(x)$ を得る. 同様にして $z_2(x) = Z_1(x)$ を得るので

$$z_1(x) = z_2(x).$$

したがって正値定常解の一意性が示される. $\square$

3　主定理 1.1 の証明

3.1　定常解 $\widetilde{u}(x)$ の存在

u に関する式は (4),(5) における $\gamma=0$ の場合であることに注意すると次のようになる. ただし $p(x)=1$ である.

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)u_x\right]_x + u(r-u), \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0. \end{cases} \tag{13}$$

このとき次のことが分かる.

定理 3.1. (13) を満たす正値定常解 $\widetilde{u}(x)$ が存在し $\widetilde{u}(x)\equiv r$ に限る.

証明. $\gamma=0$ より $p(x)=1$ であることに注意する.

$$\int_0^L \Big(\gamma d_x + rd(x)\Big)\exp\left(\frac{\gamma}{D}x\right)dx = \int_0^L rd(x)dx > 0.$$

であるから **補題 2.7** と **補題 2.9** より定常解 $\widetilde{u}(x)$ が存在することが示される. 次に

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)u_x\right]_x + u(r-u) = 0, \\ u_x(0)=u_x(L)=0. \end{cases} \tag{14}$$

を考える. $M>r$ なる $M>0$ と十分小さい $\varepsilon>0$ に対して $\overline{u}(x)=M,\ \underline{u}(x)=\varepsilon$ とおくと,

$$M(r-M)\le 0,\ \overline{u}_x(0)\le 0,\ \overline{u}_x(L)\ge 0.$$

より $\overline{u}(x)$ は supersolution である. また $\varepsilon>0$ は十分小であるから

$$\varepsilon(r-\varepsilon)\ge 0,\ \underline{u}_x(0)\ge 0,\ \underline{u}_x(L)\le 0.$$

より $\underline{u}(x)$ は subsolution である. ゆえに **補題 2.6** より

$$\underline{u}(x) < \widetilde{u}(x) < \overline{u}(x),$$

を得る. また

$$\underline{u}(x) < r < \overline{u}(x).$$

であるから **補題 2.6** より (14) の最大解 $V_1(x)$ が存在して,

$$0<\widetilde{u}(x)\le V_1(x),\quad 0<r\le V_1(x).$$

補題 2.9 の証明と同じ議論より $\widetilde{u}(x)\equiv r$ を得る. □

ゆえに $\widetilde{u}$ の式は次のように表される.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)\widetilde{u}_x\right]_x + \widetilde{u}\,(r-\widetilde{u}) = 0, \\ \widetilde{u}_x(0) = \widetilde{u}_x(L) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

3.2 定常解 $\widetilde{v}(x)$ の存在

v に関する単独方程式は (4),(5) で $\gamma = \beta > 0$ とすればよい.

$$\begin{cases} v_t = \dfrac{D}{d(x)}[d(x)v_x]_x - \beta v_x + v(r-v), \quad x \in (0,L), t > 0, \\ Dv_x(0,t) - \beta v(0,t) = Dv_x(L,t) - \beta v(L,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{D}{d(x)}[d(x)v_x]_x - \beta v_x + v(r-v) = 0, \quad x \in (0,L), \\ Dv_x(0) - \beta v(0) = Dv_x(L) - \beta v(L) = 0. \end{cases}$$

(6),(7) を導く方法と同様にして $v(x,t) = p(x)z(x,t)$ とおくと重み付きノイマン境界値問題の式は次のように表される.

$$\begin{cases} p(x)z_t = \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)z_x\right]_x + p(x)z\left\{\left(r + \beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z\right\}, \\ z_x(0,t) = z_x(L,t) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)z_x\right]_x + p(x)z\left\{\left(r + \beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z\right\} = 0, \\ z_x(0) = z_x(L) = 0. \end{cases}$$

ここで z の定常解 $\widetilde{z}(x)$ が存在するとき, v の定常解 $\widetilde{v}(x)$ が存在することに注意する. また定常解の存在については次の定理を示す.

定理 3.2. $\beta > 0$ が十分に小さいとき (16) を満たす正値定常解 $\widetilde{z}(x)$ が唯一つ存在する.

証明. β は十分小さいことから

$$\int_0^L \Big(\beta d_x + rd(x)\Big)\exp\left(\frac{\beta}{D}x\right)dx > 0.$$

であるから **補題 2.7** と **補題 2.9** より定常解 $\widetilde{z}(x)$ が存在することが示される. 次に一意性を示す. 今 $z_1(x), z_2(x)$ が存在するとして $z_1(x) \equiv z_2(x)$ を示す. ここで

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)z_x\right]_x + p(x)z\left\{\left(r + \beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z\right\} = 0, \\ z_x(0) = z_x(L) = 0. \end{cases}$$

を考える. $M > \max_{0\le x\le L}\left(r+\beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right)$ なる $M>0$ と十分小さい $\varepsilon>0$ に対し, $\overline{z}(x)=M$, $\underline{z}(x)=\varepsilon$ とおくと,

$$p(x)M\left\{\left(r+\beta\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)-p(x)M\right\}\le 0,\ \overline{z}_x(0)\le 0,\ \overline{z}_x(L)\ge 0.$$

より $\overline{z}(x)$ は supersolution である. また $\beta,\varepsilon>0$ は十分小であるから,

$$p(x)\varepsilon\left\{\left(r+\beta\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)-p(x)\varepsilon\right\}\ge 0,\ \underline{z}_x(0)\ge 0,\ \underline{z}_x(L)\le 0.$$

より $\overline{z}(x)$ は subsolution である. ゆえに **補題 2.6** より,

$$0<\underline{z}(x)<\widetilde{z}(x)<\overline{z}(x),$$

を満たす. 今 $M>0$ として $M>\max\Bigl(z_1(x),z_2(x),\max_{0\le x\le L}\left(r+\beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right)\Bigr)$ とすると, $\varepsilon>0$ は十分小さいので

$$\begin{aligned}\underline{z}(x)=\varepsilon\le z_1(x)\le M=\overline{z}(x),\\ \underline{z}(x)=\varepsilon\le z_2(x)\le M=\overline{z}(x).\end{aligned}$$

を得る. ゆえに最大解 $Z_1(x)$ が存在して,

$$0<z_1(x)\le Z_1(x),\ 0<z_2(x)\le Z_1(x).$$

が成り立つ. **補題 2.9** の証明と同じ議論より $z_1(x)\equiv z_2(x)$ を得る. □

ゆえに z の定常解 $\widetilde{z}(x)$ が存在するので, v の定常解 $\widetilde{v}(x)$ が存在する. このことから $\widetilde{v}$ の式は次のように表される.

$$\begin{cases}\dfrac{D}{d(x)}[d(x)\widetilde{v}_x]_x-\beta\widetilde{v}_x+\widetilde{v}(r-\widetilde{v})=0,\\ D\widetilde{v}_x(0)-\beta\widetilde{v}(0)=D\widetilde{v}_x(L)-\beta\widetilde{v}(L)=0.\end{cases}\tag{17}$$

一方で $\widetilde{z}$ の式は次である.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)\widetilde{z}_x\right]_x+p(x)\widetilde{z}\left\{\left(r+\beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right)-p(x)\widetilde{z}\right\}=0,\\ \widetilde{z}_x(0)=\widetilde{z}_x(L)=0.\end{cases}\tag{18}$$

また定常解の非存在定理については以下の通りである.

定理 3.3. $\delta_1>0$ とする. また $\beta>\dfrac{r}{\delta_1}$ を満たすならば (16) を満たす正値定常解 $\widetilde{z}(x)$ は存在しない. すなわち $\widetilde{z}(x)\equiv 0$ である.

証明. 正値定常解 $z(x) > 0$ が存在したとする. このとき

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}\left[Dd(x)p(x)z_x\right]_x + p(x)z\left\{\left(r + \beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z\right\} = 0, \\ z_x(0) = z_x(L) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

$d(x)$ をかけて, $[0, L]$ 区間で積分すると,

$$\int_0^L \left[Dd(x)p(x)z_x\right]_x dx + \int_0^L d(x)p(x)z\left\{\left(r + \beta\frac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z\right\} dx = 0.$$

ゆえに

$$\int_0^L p(x)z\left\{\beta d_x(x) + rd(x)\right\} dx = \int_0^L d(x)p(x)^2 z^2 dx. \tag{20}$$

を得る. また β, δ_1 の仮定より, $\beta\left(-\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) > r$ がいえ,

$$rd(x) + \beta d_x < 0.$$

を得る. よって (20) より矛盾. したがって正値定常解 $z(x)$ は存在しない. □

このことは $\widetilde{v}(x)$ が存在しないことを意味する.

3.3 主定理 1.1 の証明

(15) より $u(x,t) = \widetilde{u}(x)$, $v(x,t) = 0$ は (2) の解である. したがって $(\widetilde{u}, 0)$ は (2) の semi-trivial steady states である. また β が十分に小さいときは, (17) の式から $u(x,t) = 0$, $v(x,t) = \widetilde{v}(x)$ は (2) の解である. したがって β が十分に小さいときは $(0, \widetilde{v})$ は (2) の semi-trivial steady states である. 一方で $\beta > \dfrac{r}{\delta_1}$ のとき, 定常解 $\widetilde{v}(x)$ は存在しないので (2) の semi-trivial steady states $(0, \widetilde{v})$ は存在しない. □

4 主定理 1.2 の証明

$p(x) = \exp\left(\dfrac{\beta}{D}x\right)$ とおく. このとき次の二種の方程式を考える. $0 < x < L$, $t > 0$ に対し

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{D}{d(x)}[d(x)u_x]_x + u(r - u - v), \\ v_t = \dfrac{D}{d(x)}[d(x)v_x]_x - \beta v_x + v(r - u - v), \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \\ Dv_x(0,t) - \beta v(0,t) = Dv_x(L,t) - \beta v(0,t) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

が成り立つ. また定常解 $\widetilde{u}(x)$, $\widetilde{v}(x)$ は (15) 式と (17) 式を満たすことに注意する.

4.1 $(\widetilde{u},0)$ のまわりの安定性

定理 4.1. $d_x(x) \leq, \not\equiv 0$ $(x \in [0,L])$ とする. このとき任意の $\beta > 0$ に対し $(\widetilde{u},0)$ は安定.

証明. 先と同様にして $p(x) = \exp\left(\dfrac{\beta}{D}x\right)$ とおく. また $u(x,t) = \widetilde{u}(x) + \varphi(x)e^{-\lambda t}$, $v(x,t) = \phi(x)e^{-\lambda t}$ とおく. ただし $\varphi, \phi \in H^1([0,L])$ で十分小とする. (21) に代入すると次を得る.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)\varphi_x]_x - (r - 2\widetilde{u})\varphi(x) = \lambda\varphi(x) - \widetilde{u}\phi(x), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)\phi_x]_x + \beta\phi_x = \lambda\phi, \\ D\phi_x(0) - \beta\phi(0) = D\phi_x(L) - \beta\phi(L) = 0. \end{cases}$$

ここで $\phi(x) = p(x)\psi(x)$ とおくと次を得る.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)p(x)\psi_x]_x - \beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}p(x)\psi(x) = \lambda p(x)\psi(x), \\ \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

$(\widetilde{u},0)$ のまわりの線形化固有値問題とは (22) と (23) を満たす λ, $(\varphi,\psi) \not\equiv (0,0)$ を求める問題である. 後で示す **補題 6.1** より線形化固有値問題の安定性は (23) の第一固有値が正であることを示せばよい.(23) 式に $d(x)\psi$ をかけて $[0,L]$ 積分すると,

$$-\int_0^L [Dd(x)p(x)\psi_x]_x\psi dx - \beta\int_0^L d_x p(x)\psi^2 dx = \lambda\int_0^L d(x)p(x)\psi^2 dx,$$

ゆえに

$$D\int_0^L d(x)p(x)\psi_x^2 dx - \beta\int_0^L d_x(x)p(x)\psi^2 dx = \lambda\int_0^L d(x)p(x)\psi^2 dx,$$

したがって次のように第一固有値は特徴付けできる.

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{\phi\in H^1([0,L]) \\ \phi\not\equiv 0}} \left\{ \frac{D\displaystyle\int_0^L d(x)p(x)\phi_x^2 dx - \beta\int_0^L d_x p(x)\phi^2 dx}{\displaystyle\int_0^L d(x)p(x)\phi^2 dx} \right\}.$$

今 ψ は λ_1 に対応する第一固有関数であるから

$$\lambda_1 = \frac{D\displaystyle\int_0^L d(x)p(x)\psi_x^2 dx - \beta\int_0^L d_x(x)p(x)\psi^2 dx}{\displaystyle\int_0^L d(x)p(x)\psi^2 dx}.$$

が得られ $\lambda_1 > 0$ となる. **補題 6.1** より $(\widetilde{u},0)$ は安定であることが示される. □

4.2 $(0,\widetilde{v})$ のまわりの安定性

定理 4.2. $d_x(x) \leq, \not\equiv 0$ $(x \in [0,L])$ のとき十分小さい $\beta > 0$ に対して $(0,\widetilde{v})$ は不安定である.

証明. $p(x) = \exp\left(\dfrac{\beta}{D}x\right)$ とおく. $u(x,t) = \phi(x)e^{-\mu t}$, $v(x,t) = \widetilde{v}(x) + \psi(x)e^{-\mu t}$ とおく. ただし $\phi, \psi \in H^1([0,L])$ で十分小とする. (21) に代入すると次を得る.

$$\begin{cases} -\dfrac{D}{d(x)}[d(x)\phi_x]_x - (r-\widetilde{v})\phi = \mu\phi, \\ \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{D}{d(x)}[d(x)\psi_x]_x + \beta\psi_x - \psi(r-2\widetilde{v}) = \mu\psi - \widetilde{v}\phi, \\ D\psi_x(0) - \beta\psi(0) = D\phi_x(L) - \beta\psi(L) = 0. \end{cases}$$

$\psi(x) = p(x)\varphi(x)$ とおくと,

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)p(x)\varphi_x]_x - p(x)\varphi\{(r+\beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}) - 2\widetilde{v}\} = \mu p(x)\varphi - \widetilde{v}\phi, \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

$(0,\widetilde{v})$ のまわりの線形化固有値問題は (24),(25) 式を満たす μ と $(\phi,\varphi) \not\equiv (0,0)$ を求める問題である. 後で示す **補題 6.2** より線形化固有値問題の安定不安定性は (24) の式の第一固有値が負になることを示せばよい.(24) の式に $d(x)\phi(x)$ をかけて $[0,L]$ 上積分すると

$$\begin{aligned} -\int_0^L [Dd(x)\phi_x]_x\phi dx - \int_0^L d(x)\phi^2(r-\widetilde{v})dx &= \mu\int_0^L d(x)\phi^2 dx, \\ \int_0^L Dd(x)\phi_x^2 dx - \int_0^L d(x)\phi^2(r-\widetilde{v})dx &= \mu\int_0^L d(x)\phi^2 dx. \end{aligned}$$

となるので

$$\mu = \frac{\displaystyle\int_0^L Dd(x)\phi_x^2 dx - \int_0^L d(x)\phi^2(r-\widetilde{v})dx}{\displaystyle\int_0^L d(x)\phi^2 dx}.$$

を得る. 第一固有値の特徴づけより

$$\mu_1 = \inf_{\substack{w\in H^1([0,L]) \\ w\not\equiv 0}} \frac{\displaystyle\int_0^L Dd(x)w_x^2 dx - \int_0^L d(x)w^2(r-\widetilde{v})dx}{\displaystyle\int_0^L d(x)w^2 dx}.$$

を得る. また $w=\widetilde{v}$ とすれば

$$\mu_1 \leq \frac{\displaystyle\int_0^L Dd(x)\widetilde{v}_x^2 dx - \int_0^L d(x)\widetilde{v}^2(r-\widetilde{v})dx}{\displaystyle\int_0^L d(x)\widetilde{v}^2 dx}, \tag{26}$$

を得る. ここで第一固有値 μ_1 が負であることを示すには (26) の右辺の分子が負であることを示せばよい. すなわち

$$\int_0^L Dd(x)\widetilde{v}_x^2 dx - \int_0^L d(x)\widetilde{v}^2(r-\widetilde{v})dx < 0.$$

を示せばよい. また $\widetilde{v}$ は次を満たしていた.

$$\frac{D}{d(x)}\left[d(x)\widetilde{v}_x\right]_x - \beta\widetilde{v}_x + \widetilde{v}(r-\widetilde{v}) = 0,$$

$d(x)$ をかけ変形すると,

$$[d(x)(D\widetilde{v}_x - \beta\widetilde{v})]_x + \beta d_x\widetilde{v} + d(x)\widetilde{v}(r-\widetilde{v}) = 0,$$

を得る. $\widetilde{v}$ をかけて $[0,L]$ 積分すると,

$$\int_0^L [d(x)(D\widetilde{v}_x - \beta\widetilde{v})]_x \widetilde{v} dx + \beta\int_0^L d_x\widetilde{v}^2 dx + \int_0^L d(x)\widetilde{v}^2(r-\widetilde{v})dx = 0,$$

$$-\int_0^L Dd(x)\widetilde{v}_x^2 dx + \beta\int_0^L d(x)\widetilde{v}_x\widetilde{v} dx + \int_0^L d(x)\widetilde{v}^2\left(r-\widetilde{v}\right)dx + \beta\int_0^L d_x\widetilde{v}^2 = 0,$$

ゆえに次を得る.

$$\int_0^L Dd(x)\widetilde{v}_x^2 dx - \int_0^L d(x)\widetilde{v}^2(r-\widetilde{v})dx = \beta\int_0^L \widetilde{v}\{d_x\widetilde{v} + d(x)\widetilde{v}_x\}dx.$$

(26) より μ_1 が負であることを示すには $\beta\displaystyle\int_0^L \widetilde{v}\{d_x\widetilde{v} + d(x)\widetilde{v}_x\}dx < 0$ を示せばよいことがわかる. $\widetilde{v}$ は β に依存しているので正値定常解 $\widetilde{v}(x)$ を $\widetilde{v}(x) = v_\beta(x)$ とおく. このとき $\beta = 0$ で $v_0(x) \equiv r$ であることに注意する. ここで以下の主張を示す.

Claim. $\beta \to 0$ のとき $v_\beta(x) \to v_0(x)$ in $H^1([0,L])$

もし上の **Claim** が成り立つとする. このとき

$$\int_0^L v_\beta(x)\left(d_x v_\beta(x) + d(x)v_\beta'\right)dx = \int_0^L (d_x v_\beta^2(x) + d(x)v_\beta(x)v_\beta')dx$$

である. よって **Claim** を用いると

$$\int_0^L (d_x v_\beta^2(x) + d(x)v_\beta(x)v'_\beta)dx \to \int_0^L r^2 d_x dx < 0.$$

したがって十分小さい β に対し $\beta \int_0^L \widetilde{v}(x)\left(d_x\widetilde{v} + d(x)\widetilde{v}_x\right)dx < 0$ が示されたので, 第一固有値 μ_1 は負である. すなわち $(0,\widetilde{v})$ は不安定であることが示される. そこで **Claim** の証明を行う. 先と同様に $p(x) = \exp\left(\dfrac{\beta}{D}x\right)$ とおく. $d \in C^1([0,L])$ かつ $d(x) > 0$ より, ある $d_0, d_1 > 0$ が存在して $0 < d_0 \le d(x) \le d_1$ としてよい. また十分小さい β_0 に対して $0 \le \beta \le \beta_0$ とする. このとき $p(x) \le \exp(\dfrac{\beta_0}{D}L)$ より p は一様有界である. ここで $v_\beta(x) = p(x)z_\beta(x)$ とおく. このとき $z_0 \equiv v_0 \equiv r$ である. 以下ではいくつかの **Step** に分けて **Claim** の証明を行う.

Step 1. ある定数 M が存在して, $||z_\beta||^2_{H^1([0,L])} \le M$ が成り立つ.

証明. z_β は次を満たすことに注意する.

$$\begin{cases} \left[Dd(x)p(x)z'_\beta\right]_x + d(x)p(x)z_\beta\left\{\left(r + \beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z_\beta\right\} = 0, \\ z'_\beta(0) = z'_\beta(L) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

すなわち

$$\begin{cases} Dd(x)p(x)z''_\beta + [Dd(x)p(x)]_x z'_\beta + p(x)z_\beta\left\{(rd(x) + \beta d_x) - d(x)p(x)z_\beta\right\} = 0, \\ z'_\beta(0) = z'_\beta(L) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

ここで $c(x) = rd(x) + \beta d_x - d(x)p(x)z_\beta$ とおく. $z_\beta \in H^1([0,L])$ より $z_\beta \in C^1([0,L])$ である. ゆえに, ある x_0 が存在し $||z_\beta||_{L^\infty([0,L])} = z_\beta(x_0)$ を考える. $x_0 \in (0,L)$ ならば $z'_\beta(x_0) = 0$, $z''_\beta(x_0) \le 0$ である. (28) で $x = x_0$ とすれば $c(x_0) \ge 0$ を得る. 一方で $x_0 = 0, L$ のとき, $z'_\beta(x_0) = 0$, $z''_\beta(x_0) \le 0$ より先と同様に $c(x_0) \ge 0$ である. ゆえに

$$c(x_0) \ge 0,\ (x \in [0,L]).$$

また $c(x_0) \ge 0$ より

$$rd(x_0) + \beta d_x(x_0) - d(x_0)p(x_0)z_\beta(x_0) \ge 0 \Longleftrightarrow z_\beta(x_0) \le \frac{1}{d_0}(rd_1 + \beta_0 \max_{0\le x\le L} d_x(x_0)),$$

$M_0 = \dfrac{1}{d_0}(rd_1 + \beta_0 \max\limits_{0\le x\le L} d_x(x_0))$ とおくと, $0 < z_\beta(x_0) \le M_0$ である. ゆえに,

$$||z_\beta||_{L^\infty([0,L])} \le M_0,$$

を得る. また,

$$||z_\beta||_{L^2([0,L])} \le M_0\sqrt{L}.$$

も導くことができる. ここで $p(x) \leq \exp(\dfrac{\beta_0}{D}L)$ である. 以降 $p_1 = \exp(\dfrac{\beta_0}{D}L)$ とする. また $f(x) = z_\beta p(x)\left\{(rd(x) + \beta_0 d_x) - d(x)p(x)z_\beta\right\}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leq M_0 p_1 \left(|rd_1 + \beta_0 \max_{0\leq x\leq L} d_x(x)| + |d(x)p(x)z_\beta| \right) \\
&\leq M_0 p_1 \left(rd_1 + \beta_0 \max_{0\leq x\leq L} |d_x(x)| + d_1 p_1 M_0 \right)
\end{aligned}
$$

ここで M_1 を

$$
M_1 = M_0 p_1 \left(rd_1 + \beta_0 \max_{0\leq x\leq L} |d_x(x)| + d_1 p_1 M_0 \right)
$$

とおくと

$$
||f||_{L^\infty([0,L])} \leq M_1.
$$

を得る. 今 $q(x) = d(x)p(x)$ とおくと $d_0 \leq q(x) \leq d_1 p_1$ である. ここで $q_1 = d_0,\ q_2 = d_1 p_1$ とおくと q_1, q_2 は β に依らないことに注意する. また $q \in C^1([0,L])$ より

$$
\begin{aligned}
|q_x| &= |d_x p(x) + d(x)\frac{\beta}{D}p(x)|, \\
&\leq |p_1| \max_{0\leq x\leq L} |d_x(x)| + |d_1 \frac{\beta_0}{D} p_1|.
\end{aligned}
$$

右辺を M_2 とおくと $||q_x||_{L^\infty([0,L])} \leq M_2$ より q_x は一様有界である. $q_1 > 0$ より $q > 0$ なので (28) を q で割ると,

$$
\begin{aligned}
Dqz_\beta'' + q_x z_\beta' + f(x) &= 0, \\
Dz_\beta'' + \frac{q_x}{q} z_\beta' + \frac{f(x)}{q} &= 0.
\end{aligned}
$$

z_β をかけて $[0,L]$ 上で積分すると,

$$
\int_0^L Dz_\beta'' z_\beta dx + \int_0^L \frac{q_x}{q} z_\beta' z_\beta dx + \int_0^L \frac{f}{q} z_\beta dx = 0.
$$

$$
\int_0^L D{z_\beta'}^2 dx = \int_0^L \frac{q_x}{q} z_\beta' z_\beta dx + \int_0^L \frac{f}{q} z_\beta dx. \tag{29}
$$

$C_0 = \dfrac{\max_{0\leq x\leq L} q_x}{q_1}$ とおくと q_x の一様有界性より $\max_{0\leq x\leq L} q_x$ は β に依らないので C_0 は β に依らないことが分かる. またヤングの不等式から任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
D||z'_\beta||^2_{L^2([0,L])} &\le C_0\int_0^L |z'_\beta||z_\beta|dx + \frac{M_1}{q_1}\int_0^L |z_\beta|dx,\\
&\le C_0(\varepsilon||z'_\beta||^2_{L^2([0,L])} + \frac{1}{\varepsilon}||z_\beta||^2_{L^2([0,L])}) + \frac{M_0M_1L}{q_1}.
\end{aligned}
$$

$C_0>0$ であるから $\varepsilon = \dfrac{D}{2C_0}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{2}||z'_\beta||^2_{L^2([0,L])} &\le \frac{2C_0^2}{D}||z_\beta||^2_{L^2([0,L])} + \frac{M_0M_1L}{q_1},\\
||z'_\beta||^2_{L^2([0,L])} &\le \frac{4C_0^2}{D^2}||z_\beta||^2_{L^2([0,L])} + \frac{2M_0M_1L}{Dq_1},\\
&\le \frac{4C_0^2M_0^2L}{D^2} + \frac{2M_0M_1L}{Dq_1}.
\end{aligned}
$$

を得る. $\overline{M} = M_0L^2 + \dfrac{4C_0^2M_0L^2}{D^2} + \dfrac{2M_0M_1L}{Dq_1}$ とおくと, $\overline{M}$ は β に依らないことが分かり,

$$
\begin{aligned}
||z_\beta||^2_{H^1([0,L])} &= ||z'_\beta||^2_{L^2([0,L])} + ||z_\beta||^2_{L^2([0,L])},\\
&\le \overline{M}.
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
||z_\beta||^2_{H^1([0,L])} \le \overline{M}.
$$

$\square$

Step 2. ある部分列 $\{z_{\beta_j}\}\subset\{z_\beta\}$ と, ある $w\in H^1([0,L])$ が存在し,

$$
z_{\beta_j}\to w,\ \text{weakly in } H^1([0,L]),\ \text{as } \beta_j\to 0.
$$

が成り立つとき, $w(x)\equiv 0$, または $w(x)\equiv r$ である.

証明. Step 1 より有界列の弱コンパクト性から, ある部分列 $\{z_{\beta_j}\}\subset\{z_\beta\}$ と, ある $w\in H^1([0,L])$ が存在し,

$$
z_{\beta_j}\to w,\ \text{weakly in } H^1([0,L]),\ \text{as } \beta_j\to 0.
$$

が成り立つ. 特に z_{β_j} は次の式

$$
\begin{cases}
\left[Dd(x)p(x)z'_{\beta_j}\right]_x + d(x)p(x)z_{\beta_j}\left\{\left(r+\beta_j\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right) - p(x)z_{\beta_j}\right\} = 0,\\
z'_{\beta_j}(0) = z'_{\beta_j}(L) = 0.
\end{cases}
$$

を満たす. ここで任意に $\varphi \in C_0^1([0,L])$ をとる.

$$\int_0^L \left[Dd(x)p(x)z'_{\beta_j}\right]_x \varphi dx + \int_0^L d(x)p(x)z_{\beta_j}(r-p(x)z_{\beta_j})\varphi dx + \beta_j \int_0^L d_x p(x) z_{\beta_j}\varphi dx = 0,$$
$$-\int_0^L Dd(x)p(x)z'_{\beta_j}\varphi' dx + \int_0^L d(x)p(x)z_{\beta_j}(r-p(x)z_{\beta_j})\varphi dx + \beta_j \int_0^L d_x p(x) z_{\beta_j}\varphi dx = 0.$$

を満たす. ここで $\beta_j \to 0$ のとき $z_{\beta_j} \to w$ weakly in $H^1([0,L])$ であり, $H^1([0,L])$ は $L^\infty([0,L])$ にコンパクトに埋め込めるので,

$$z_{\beta_j} \to w \text{ strongly in } L^2([0,L]) \cap L^\infty([0,L]),\ z'_{\beta_j} \to w' \text{ weakly in } L^2([0,L]).$$

を用いると次を得る.

$$-\int_0^L Dd(x)w'\varphi' dx + \int_0^L d(x)w(r-w)\varphi dx = 0,$$
$$-Dd(x)w'\varphi\Big|_{x=0,L} + \int_0^L [Dd(x)w']_x\varphi dx + \int_0^L d(x)w(r-w)\varphi dx = 0.$$

したがって $\varphi(0)=\varphi(L)=0$ より,

$$[Dd(x)w']_x + d(x)w(r-w) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{d(x)}[Dd(x)w']_x + w(r-w) = 0.$$

を得る. φ の取り方として, $\varphi \in C^1([0,L])$ かつ $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(L)=0$ をとれば, $w'(0)=0$ を得る. また $\varphi \in C^1([0,L])$ かつ $\varphi(0)=0$, $\varphi(L) \neq 0$ をとれば, $w'(L)=0$ を得る. すなわち次を得る.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)w']_x + w(r-w) = 0, \\ w'(0) = w'(L) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

ここで $0 < z_{\beta_j} \leq M_0$ より $0 \leq w \leq M_0$ である. また (30) より $w(x) \equiv 0$ または $w(x) \equiv r$ を得る. □

Step 3. $w(x) \not\equiv 0$ である. ゆえに $w(x) \equiv r$.

証明.

$$E(z) = \frac{1}{2}\int_0^L Dd(x)p(x)z_x^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L (rd(x)+\beta d_x)p(x)z^2 dx + \frac{1}{3}\int_0^L d(x)p(x)^2|z|^3 dx$$

とおく. minimizer が存在すれば, オイラーラグランジュ方程式は次で与える正値定常解 z_{β_j} の式と一致するという事実を用いる.

$$\begin{cases} \left[Dd(x)p(x)z_{\beta_{j_x}}\right]_x + d(x)p(x)z_{\beta_j}\left\{\left(r+\beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right)-p(x)z_{\beta_j}\right\}=0, \\ z_{\beta_{j_x}}(0)=z_{\beta_{j_x}}(L)=0. \end{cases}$$

ここで $\sigma=\inf\left\{E(z); z\in H^1([0,L])\right\}$ とおくと, ある minimizing sequence $\{z_n\}\geq 0$ が存在して,

$$E(z_n)\to\sigma, \quad (n\to\infty).$$

が成り立ち, 収束列は有界列であるから, ある正の定数 C が存在し

$$|E(z_n)|\leq C.$$

を得る. ここから $\{z_n\}$ の一様有界性を示す.

$$E(z_n)\geq\frac{1}{2}\int_0^L(|z_n'|^2+|z_n|^2)dx-C\int_0^L|z_n|^2dx+\frac{1}{3}\int_0^L|z_n|^3dx,$$

ここでヤングの不等式を第 2 項に用いる. 共役数として $\mathcal{P}=\dfrac{3}{2},\mathcal{Q}=3$ とする.

$$\frac{C}{\varepsilon}(\varepsilon|t|^2)\leq\frac{1}{\mathcal{P}}(\varepsilon|t|^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\mathcal{Q}}(\frac{C}{\varepsilon})^3=\frac{2}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}|t|^3+\frac{1}{3}(\frac{C}{\varepsilon})^3.$$

従って, $\delta=\dfrac{2}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ と置くと,

$$C|t|^2\leq\delta|t|^3+\frac{1}{3}(\frac{C}{\varepsilon})^3.$$

を得る. t として z_n を取ると,

$$C|z_n|^2\leq\delta|z_n|^3+\frac{1}{3}(\frac{C}{\varepsilon})^3.$$

となる. これを $[0,L]$ 上で積分をすると,

$$\begin{aligned} C\int_0^L|z_n|^2dx &\leq \delta\int_0^L|z_n|^3dx+\frac{1}{3}(\frac{C}{\varepsilon})^3L, \\ \Longleftrightarrow -C\int_0^L|z_n|^2dx+\delta\int_0^L|z_n|^3dx &\geq -\frac{1}{3}(\frac{C}{\varepsilon})^3L. \end{aligned}$$

となる. $\delta=\dfrac{1}{3}$ となるように ε を定める. これを踏まえると,

$$\begin{aligned} E(z_n) &\geq \frac{1}{2}\int_0^L(|z_n'|^2+|z_n|^2)dx-C\int_0^L|z_n|^2dx+\frac{1}{3}\int_0^L|z_n|^3dx, \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^L(|z_n'|^2+|z_n|^2)dx-\frac{1}{3}(\frac{C}{\varepsilon})^3L, \\ &= \frac{1}{2}\|z_n\|^2_{H^1([0,L])}-\frac{1}{3}(\frac{C}{\varepsilon})^3L. \end{aligned}$$

$C^* = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{C}{\varepsilon}\right)^3 L$ とおく. ゆえにある正の定数 C_1, C_2 が存在して

$$C \geq C_1 ||z_n||^2_{H^1([0,L])} - C_2.$$

がいえる. このとき $\overline{C} = \dfrac{C + C_2}{C_1}$ とおけば

$$||z_n||^2_{H^1([0,L])} \leq \overline{C}$$

有界列の弱コンパクト性より, 部分列 $\{z_{n_k}\} \subset \{z_n\}$ とある $z^* \in H^1([0,L])$ が存在し,

$$z_{n_k} \to z^* \text{ weakly in } H^1([0,L]) \quad (k \to \infty). \tag{31}$$

が導かれる. したがってノルムの弱下半連続性より,

$$||z^*||^2_{H^1([0,L])} \leq \liminf_{k\to\infty} ||z_{n_k}||^2_{H^1([0,L])}.$$

を得る. ここで

$$|||u|||^2_{H^1([0,L])} := \int_0^L d(x)p(x)u_x^2 dx + \int_0^L d(x)p(x)u^2 dx,$$

と定義すると

$$d_0||u||^2_{H^1([0,L])} \leq |||u|||^2_{H^1([0,L])} \leq d_1 p_1 ||u||^2_{H^1([0,L])},$$

よりノルムの同値性がいえる. すなわち $(H^1, ||\cdot||_{H^1})$ を $(H^1, |||\cdot|||_{H^1})$ とみなして考えることができるので, 上のノルムの弱下半連続性は次のように表すことができる.

$$|||z^*|||^2_{H^1([0,L])} \leq \liminf_{k\to\infty} |||z_{n_k}|||^2_{H^1([0,L])}.$$

また (31) から

$$z_{n_k} \to z^* \text{ in } L^\infty([0,L]),$$

を得るので L^2, L^3 での強収束がいえる. したがって

$$\begin{aligned} E(z^*) &\leq \liminf_{k\to\infty} E(z_{n_k}), \\ &\leq \lim_{k\to\infty} E(z_{n_k}), \\ &= \sigma. \end{aligned}$$

を得る. 一方 inf の定義から $\sigma \leq E(z^*)$ であるから,

$$\sigma = E(z^*).$$

となり z^* は minimizer である. ゆえに minimizer は正値定常解の式を満たすから $z^* = z_{\beta_j}$ としてもよい. また $\beta_j \to 0$ のとき

$$E(r) \to -\frac{r^3}{6}\int_0^L d(x)dx \leq -\frac{r^3}{6} d_0 L.$$

$\delta > 0$ として $\delta = \dfrac{r^3}{6} d_0 L$ とおくと, 十分小さい β_j に対し

$$E(r) \leq -\delta < 0,$$

を得る. z_{β_j} は minimizer であるから,

$$E(z_{\beta_j}) \leq E(r) \leq -\delta < 0,$$

が導かれる. 今 $z_{\beta_j} \to w,\ weakly\ in\ H^1([0,L])$ であるから

$$E(w) \leq \liminf_{\beta_j \to 0} E(z_{\beta_j}) \leq -\delta < 0,$$

$E(0) = 0$ であるから

$$E(w) < E(0) = 0.$$

したがって $w \not\equiv 0$ すなわち $w \equiv r$ である. □

Step 4. $\beta \to 0$ のとき $z_\beta(x) \to z_0(x)\ in\ H^1([0,L])$.

証明. 今 $w(x) \equiv r = z_0(x)$ であり, **Step 2, 3** より

$$||z_{\beta_j} - z_0||_{L^\infty([0,L])} \to 0\ (\beta_j \to 0),$$

すなわち,

$$||z_{\beta_j} - z_0||_{L^2([0,L])} \to 0\ (\beta_j \to 0).$$

である. また (29) で z_{β_j} の式は

$$\int_0^L D z'^2_{\beta_j} dx = \int_0^L \frac{q_x}{q} z'_{\beta_j} z_{\beta_j} dx + \int_0^L \frac{f}{q} z_{\beta_j} dx. \tag{32}$$

である. 今

$$\left| \int_0^L \frac{q_x}{q} z'_{\beta_j} z_{\beta_j} dx \right| \leq C_0 \int_0^L |z'_{\beta_j}||z_{\beta_j}| dx.$$

である. 一方で $z'_{\beta_j} \to w'$ weakly in $L^2([0,L])$ より

$$(z'_{\beta_j}, \psi)_{L^2([0,L])} \to (w', \psi)_{L^2([0,L])}$$

である. $\psi \in L^2([0,L])$ を任意に取ったので, $\psi = |z_{\beta_j}|$ とすれば

$$C_0 \int_0^L |z'_{\beta_j}||z_{\beta_j}| dx \to 0\ (\beta_j \to 0).$$

となるので,

$$\int_0^L \frac{q_x}{q} z'_{\beta_j} z_{\beta_j} dx \to 0 \ (\beta_j \to 0). \tag{33}$$

を得る. また, $z_{\beta_j} \to r$ in $L^\infty([0,L])$ より $\beta_j \to 0$ のとき $f(x) \to 0$ を得る. したがって次が成り立つ.

$$\int_0^L \frac{f}{q} z_{\beta_j} dx \to 0 \ (\beta_j \to 0). \tag{34}$$

よって (32),(33),(34) の式から $\beta_j \to 0$ のとき

$$\int_0^L |z'_{\beta_j}|^2 dx \to \int_0^L |w'|^2 dx = 0.$$

を得る. 今 $z_0 = r$ より $w' \equiv 0 = z'_0(x)$ であるから,

$$||z'_{\beta_j} - z'_0||_{L^2([0,L])} \to 0 \ (\beta_j \to 0).$$

を得る. ゆえに $||z_{\beta_j} - z_0||_{H^1([0,L])} \to 0$ を得る. よってある $\{z_{\beta'_j}\} \subset \{z_{\beta_j}\}$ が存在して,

$$||z_{\beta'_j} - z_0||_{H^1([0,L])} \to 0 \ (\beta_j \to 0).$$

補題 2.3 より

$$||z_\beta - z_0||_{H^1([0,L])} \to 0 \ (\beta \to 0).$$

すなわち $\beta \to 0$ のとき $z_\beta(x) \to z_0(x)$ in $H^1([0,L])$. □

最終的な結論を与える.

Step 5. $\beta \to 0$ のとき $v_\beta(x) \to v_0(x)$ in $H^1([0,L])$.

証明. $v_\beta = p(x) z_\beta$, $v_0 = z_0 = r$ であったことに注意する. ここで

$$|||u|||^2_{L^2([0,L])} = \int_0^L (p^{-1}u)^2 dx,$$

と定めると

$$\frac{1}{p_1^2} ||u||^2_{L^2([0,L])} \leq |||u||||^2_{L^2([0,L])} \leq ||u||^2_{L^2([0,L])},$$

よりノルムの同値性がいえる. すなわち $(L^2, ||\cdot||_{L^2})$ を $(L^2, |||\cdot|||_{L^2})$ とみなして考えることができる. **Step 4** の主張より

$$\begin{aligned} |||v_\beta|||_{L^2([0,L])} &= \int_0^L (p^{-1})^2 (p z_\beta)^2 dx, \\ &= \int_0^L z_\beta^2 dx, \\ &\to \int_0^L r^2 dx. \end{aligned}$$

したがって
$$|||v_\beta - v_0|||_{L^2([0,L])} \to 0 \ (\beta \to 0).$$
すなわち
$$||v_\beta - v_0||_{L^2([0,L])} \to 0 \ (\beta \to 0).$$
ゆえに, ある正の数 M が存在して,
$$|||v_\beta|||_{L^2([0,L])} \leq M. \tag{35}$$
が成り立つ.
$$v'_\beta = \frac{\beta}{D} v_\beta + p(x) z'_\beta,$$
であるから, 両辺 2 乗し積分すると,
$$\int_0^L v'^2_\beta dx = \int_0^L \frac{\beta^2}{D^2} v_\beta^2 dx + 2\frac{\beta}{D} \int_0^L p(x) v_\beta z'_\beta dx + \int_0^L p^2(x) z'^2_\beta dx,$$
を得る. **Step 4** より $||z'_\beta - z'_0||_{L^2([0,L])} \to 0,\ (\beta \to 0)$ がいえるので, 右辺の積分の第 3 項目は
$$||z'_\beta||_{L^2([0,L])} \leq \int_0^L p^2(x) z'^2_\beta dx \leq p_1^2 ||z'_\beta||_{L^2([0,L])},$$
であり, $z'_0 = 0$ より,
$$\int_0^L p^2(x) z'^2_\beta dx \to 0 \ (\beta \to 0).$$
を得る. また右辺の積分の第 2 項目はシュワルツの不等式より,
$$\int_0^L p(x) v_\beta z'_\beta dx \to 0 \ (\beta \to 0).$$
を得る. 右辺の積分の第 1 項目は (35) より,
$$\left| \int_0^L \frac{\beta^2}{D^2} v_\beta^2 dx \right| \leq \frac{\beta^2}{D^2} M,$$
であるから,
$$\int_0^L \frac{\beta^2}{D^2} v_\beta^2 dx \to 0 \ (\beta \to 0).$$
以上より $z'_0 = v'_0 = 0$ より
$$||v'_\beta - v'_0||_{L^2([0,L])} \to 0 \ (\beta \to 0).$$
と表わすことができる. ゆえに
$$||v_\beta - v_0||_{H^1([0,L])} \to 0 \ (\beta \to 0).$$
を得る. □

以上より **Claim** が示せたので $(0, \widetilde{v})$ の不安定性が示された.

5　主定理 1.3 の証明

5.1　準備

(u,v) を co-existence steady state とする. すなわち $u(x), v(x) > 0$ であるような解 (u,v) を (2) が解として持つとする. (2) より, $u(x,t) = u(x),\ v(x,t) = v(x)$ とすると次を得る.

$$\begin{cases} [d(x)(Du_x - \beta u)]_x + \beta d_x u + d(x)u(r-u-v) = -\beta d(x)u_x, \\ [d(x)(Dv_x - \beta v)]_x + \beta d_x v + d(x)v(r-u-v) = 0, \\ u_x(0) = u_x(L) = 0, \\ Dv_x(0) - \beta v(0) = Dv_x(L) - \beta v(L) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

(36) から次が成り立つ.

補題 5.1. (u,v) を co-existence steady state とする. すなわち $u(x), v(x) > 0$ であるような解 (u,v) を (2) が解として持つとする. このとき $0 \le y_1 \le y_2 \le L$ を満たす任意の 2 点 y_1, y_2 に対し次が成り立つ.

$$\beta \int_{y_1}^{y_2} (d_x u + d(x)u_x)v dx = D\Big[d(x)u_x v\Big]_{y_1}^{y_2} - \Big[d(x)(Dv_x - \beta v)u\Big]_{y_1}^{y_2}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{D}\int_{y_1}^{y_2} d(x)(Dv_x - \beta v)u \exp(-\frac{\beta}{D}x)dx - \beta\int_{y_1}^{y_2} d_x uv \exp(-\frac{\beta}{D}x)dx \\ &\quad = \Big[d(x)(Dv_x - \beta v)u\exp(-\frac{\beta}{D}x)\Big]_{y_1}^{y_2} - \Big[Dd(x)u_x v\exp(-\frac{\beta}{D}x)\Big]_{y_1}^{y_2}. \end{aligned} \tag{38}$$

証明. (37) を示す. (36) より u の式に v をかけたものから v の式に u をかけたものを引くと次を得る.

$$v[d(x)(Du_x - \beta u)]_x - u[d(x)(Dv_x - \beta v)]_x = -\beta d(x)u_x v,$$

$[y_1, y_2]$ で積分すると,

$$\int_{y_1}^{y_2} v[d(x)(Du_x - \beta u)]_x dx - \int_{y_1}^{y_2} u[d(x)(Dv_x - \beta v)]_x dx = -\beta\int_{y_1}^{y_2} d(x)u_x v dx,$$

を得る. ここで各項で計算を行う. 第 1 項目は

$$\int_{y_1}^{y_2} v[d(x)(Du_x - \beta u)]_x dx = \Big[d(x)(Du_x - \beta u)v\Big]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} d(x)(Du_x - \beta u)v_x dx,$$

となり, 第 2 項目は

$$-\int_{y_1}^{y_2} u[d(x)(Dv_x - \beta v)]_x dx = -\Big[d(x)(Dv_x - \beta v)u\Big]_{y_1}^{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} d(x)(Dv_x - \beta v)u_x dx,$$

となる. 右辺は次となる.

$$-\beta\int_{y_1}^{y_2} d(x)u_x v dx = -\Big[\beta d(x)uv\Big]_{y_1}^{y_2} + \beta\int_{y_1}^{y_2}(d(x)v_x + d_x v)udx.$$

ゆえに整理すると,

$$D\Big[d(x)u_x v\Big]_{y_1}^{y_2} - \Big[d(x)(Dv_x - \beta v)u\Big]_{y_1}^{y_2} + \beta\int_{y_1}^{y_2}(d(x)uv_x - d(x)u_x v)dx$$
$$= \beta\int_{y_1}^{y_2}(d(x)v_x + d_x v)udx.$$

積分を整理することで結論を得る. 次に (38) を示す. (36) より u の式に $\exp(-\frac{\beta}{D}x)v$ をかけたものから v の式に $\exp(-\frac{\beta}{D}x)u$ をかけたものを引くと次を得る.

$$\exp(-\frac{\beta}{D}x)v[d(x)(Du_x-\beta u)]_x - \exp(-\frac{\beta}{D}x)u[d(x)(Dv_x-\beta v)]_x = -\beta d(x)u_x v\exp(-\frac{\beta}{D}x),$$

$[y_1, y_2]$ で積分すると,

$$\int_{y_1}^{y_2}\exp(-\frac{\beta}{D}x)v[d(x)(Du_x-\beta u)]_x dx - \int_{y_1}^{y_2}\exp(-\frac{\beta}{D}x)u[d(x)(Dv_x-\beta v)]_x dx$$
$$= -\beta\int_{y_1}^{y_2} d(x)u_x v\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx,$$

を得る. ここで各項で計算を行う. 第 1 項目は

$$\int_{y_1}^{y_2}\exp(-\frac{\beta}{D}x)v[d(x)(Du_x-\beta u)]_x dx = \Big[\exp(-\frac{\beta}{D}x)vd(x)(Du_x-\beta u)\Big]_{y_1}^{y_2}$$
$$-\int_{y_1}^{y_2}[\exp(-\frac{\beta}{D}x)v]_x d(x)(Du_x-\beta u)dx,$$

となり, 第 2 項目は

$$-\int_{y_1}^{y_2}\exp(-\frac{\beta}{D}x)u[d(x)(Dv_x-\beta v)]_x dx = -\Big[\exp(-\frac{\beta}{D}x)ud(x)(Dv_x-\beta v)\Big]_{y_1}^{y_2}$$
$$+\int_{y_1}^{y_2}[\exp(-\frac{\beta}{D}x)u]_x d(x)(Dv_x-\beta v)dx,$$

となる. 右辺は次となる.

$$-\beta\int_{y_1}^{y_2} d(x)u_x v\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx = -\beta\Big[d(x)uv\exp(-\frac{\beta}{D}x)\Big]_{y_1}^{y_2}$$
$$+\beta\int_{y_1}^{y_2}[d(x)v\exp(-\frac{\beta}{D}x)]_x udx.$$

上の右辺の積分を

$$\int_{y_1}^{y_2}[d(x)v\exp(-\frac{\beta}{D}x)]_x udx = \int_{y_1}^{y_2}\{d_x v\exp(-\frac{\beta}{D}x) + d(x)[v\exp(-\frac{\beta}{D}x)]_x\}udx$$

とみる. 第 1 項の積分と第 2 項の積分の和は 0 になるので全体を整理すると,

$$\begin{aligned}
&\Big[Dd(x)u_x v\exp(-\frac{\beta}{D}x)\Big]_{y_1}^{y_2} - \Big[d(x)(Dv_x - \beta v)u\exp(-\frac{\beta}{D}x)\Big]_{y_1}^{y_2} \\
&= \frac{\beta}{D}\int_{y_1}^{y_2} d(x)(Dv_x - \beta v)u\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx + \beta\int_{y_1}^{y_2} d_x uv\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx
\end{aligned}$$

を得る. したがって結論を得る. □

今 $T = \dfrac{u_x}{u}$, $S = \dfrac{v_x}{v}$ とおく. このとき (36) より次を得る.

$$\begin{cases}
-DT_{xx} - \Big[2DT + D\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\Big]T_x + uT + vS = D\Big(\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x T, \\
T(0) = T(L) = 0, \\
-DS_{xx} + \Big[\beta - 2DS - D\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\Big]S_x + uT + vS = D\Big(\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x S, \\
DS_x(0) - \beta S(0) = DS_x(L) - \beta S(L) = 0.
\end{cases} \tag{39}$$

(39) より T, S は次の性質を持つ.

補題 5.2. $\left(\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right)_x \leq 0,\ (x \in [0, L])$ とするとき, 次は起こらない.

1 T が (y_1, y_2) で正の極大値を持ち, かつ $S(x) \geq 0$ $(x \in [y_1, y_2])$.

2 S が (y_1, y_2) で正の極大値を持ち, かつ $T(x) \geq 0$ $(x \in [y_1, y_2])$.

証明. 1 を背理法で示す. すなわちある $w \in (y_1, y_2)$ が存在し,

$$T(w) > 0,\ T'(w) = 0,\ T''(w) \leq 0,\ S(w) \geq 0.$$

が成り立つ. しかし (39) の T の式で $x = w$ とすれば矛盾する. 2 も同様にして示すことができる. □

補題 5.3. 次が成り立つ.

$$-D(T_x + T^2) - D\frac{d_x(x)}{d(x)}T = -D(S_x + S^2) + \beta S - D\frac{d_x(x)}{d(x)}S.$$

証明. (39) 式を導くにあたり次の 2 式

$$\begin{cases} D\left\{\dfrac{d_x(x)}{d(x)}T + T^2 + T_x\right\} + r - u - v = 0, \\ D\left\{\dfrac{d_x(x)}{d(x)}S + S^2 + S_x\right\} - \beta S + r - u - v = 0. \end{cases}$$

を得た. T の式から S の式を引けば,

$$D\left\{\frac{d_x(x)}{d(x)}T + T^2 + T_x\right\} - D\left\{\frac{d_x(x)}{d(x)}S + S^2 + S_x\right\} + \beta S = 0.$$

を得るので結論を導くことができる. □

5.2 主定理 1.3 の証明

2 種類の生物種の共存状態の非存在定理の主張は次の通りであった.

主定理 1.3 $d_x(x) \leq, \neq 0, (x \in [0, L])$ とする. また $\left(\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\right)_x \leq 0,\ (x \in [0, L])$ かつ $\delta_2 < \dfrac{4\beta}{D}$ という条件を満たすとする. このとき共存状態は存在しない.

主張の仮定より $d_x(L) < 0$ を得る. また $\beta > 0$ は十分大きいことに注意する.

証明. 背理法で証明する. すなわち (2) が $u(x), v(x) > 0$ であるような co-existence steady states (u, v) が存在するとして矛盾を導く. 証明にあたりいくつか準備する.

$$f = u_x, \quad g = Dv_x - \beta v.$$

と定めると (2) より,

$$\begin{cases} D[d(x)f(x)]_x + d(x)u(r - u - v) = 0, \quad x \in (0, L), \\ f(0) = f(L) = 0, \\ D[d(x)g(x)]_x + \beta d_x v + d(x)v(r - u - v) = 0, \quad x \in (0, L), \\ g(0) = g(L) = 0. \end{cases} \tag{40}$$

を得る. 以下では 7 つの **Claim** を示すことにより, 矛盾を導き最終的な結論を得る.

Claim 1. ある $\delta > 0$ があって

$$f(x) > 0,\ g(x) > 0 \quad x \in (L - \delta, L). \tag{41}$$

は成り立たない.

証明. 背理法で示す. このとき次の 2 つの場合のみ考えられる.

Case 1. ある $\overline{x} \in (L - \delta, L)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$f(x), g(x) > 0 \quad x \in (\overline{x}, L),\ f(\overline{x}) = 0,\ g(\overline{x}) \geq 0.$$

ここで $f(x) = uT(x),\ g(x) = Dv(S(x) - \dfrac{\beta}{D})$ と仮定したので

$$T(x) > 0,\ S(x) > \frac{\beta}{D} > 0 \quad x \in (\overline{x}, L),$$
$$T(\overline{x}) = T(L) = 0,\ S(\overline{x}) \geq \frac{\beta}{D},\ S(L) = \frac{\beta}{D}.$$

を得る. ここで $[y_1, y_2] = [\overline{x}, L]$ とおくことで, **補題 5.2** の 1 に矛盾する.

Case 2. ある $\overline{x} \in (L - \delta, L)$ が存在して,

$$f(x), g(x) > 0,\ x \in (\overline{x}, L),\ f(\overline{x}) \geq 0,\ g(\overline{x}) = 0.$$

ここで $f(x) = uT(x),\ g(x) = Dv(S(x) - \dfrac{\beta}{D})$ と仮定したので

$$T(x) > 0,\ S(x) > \frac{\beta}{D} > 0 \quad x \in (\overline{x}, L),$$
$$T(\overline{x}) \geq 0,\ T(L) = 0,\ S(\overline{x}) = S(L) = \frac{\beta}{D}.$$

を得る. ここで $[y_1, y_2] = [\overline{x}, L]$ とおくことで, **補題 5.2** の 2 に矛盾する.
以上から **Claim 1** の主張が言える. □

Claim 2. ある $\delta > 0$ が存在して,

$$g(x) < 0 \quad x \in (L - \delta, L), \text{すなわち}\ S(x) < \frac{\beta}{D} \quad x \in (L - \delta, L).$$

証明. (40) より, u の式を $d(x)u$ で割り, v の式を $d(x)v$ で割ると次を得る.

$$\frac{D}{d(x)u}[d(x)f(x)]_x = \frac{D}{d(x)v}[d(x)g(x)]_x + \beta\frac{d_x(x)}{d(x)}. \tag{42}$$

ここで $g_x(L) > 0$ を示せば **Claim 2**. が示されたことになる. 背理法で示す. すなわち $g_x(L) \leq 0$ とする.

Case 1. $g_x(L) < 0$.

(42) より

$$\frac{D}{d(x)u}[d(x)f(x)]_x = \frac{D}{d(x)v}[d(x)g(x)]_x + \beta\frac{d_x(x)}{d(x)},$$

で $x = L$ とおくと,

$$\frac{D}{d(L)u(L)}(d_x(L)f(L) + d(L)f_x(L)) = \frac{D}{d(L)v(L)}(d_x(L)g(L) + d(L)g_x(L)) + \beta\frac{d_x(L)}{d(L)}.$$

このとき $f(L)=g(L)=0$ より

$$(\text{左辺}) = \frac{D}{d(L)u(L)}d(L)f_x(L) = \frac{D}{u(L)}f_x(L),$$
$$(\text{右辺}) = \frac{D}{d(L)v(L)}d(L)g_x(L) + \beta\frac{d_x(L)}{d(L)} = \frac{D}{v(L)}g_x(L) + \beta\frac{d_x(L)}{d(L)}.$$

を得る. まとめると

$$\frac{D}{u(L)}f_x(L) = \frac{D}{v(L)}g_x(L) + \beta\frac{d_x(L)}{d(L)}.$$

を得る. したがって $g_x(L)<0,\ d_x(L)<0$ より

$$f_x(L)<0.$$

を得る. ここで $f(L)=0$ より

$$f(x)>0, x\in(L-\delta,L),$$

が導かれ, また $g(L)=0$ と $g_x(L)<0$ より

$$g(x)>0, x\in(L-\delta,L).$$

が導かれる. しかしこれは **Claim 1** より矛盾.

Case 2. $g_x(L)=0$.

$g_x(x)=Dv_{xx}-\beta v_x$ であることに注意すると (40) の g の式を変形すると,

$$D[d_x(x)g(x)+d(x)g_x(x)]+\beta d_x v+d(x)v(r-u-v)=0,$$

を得る. ここで $x=L$ とすると $g(L)=g_x(L)=0$ より

$$\beta d_x(L)v(L)+d(L)v(L)\Big(r-u(L)-v(L)\Big)=0, \tag{43}$$

と表わせるので次を得る.

$$\beta d_x(L)+d(L)\Big(r-u(L)-v(L)\Big)=0. \tag{44}$$

したがって $d_x(L)<0$ より $r-u(L)-v(L)>0$.
一方で (40) の f の式

$$D[d_x(x)f(x)+d(x)f_x(x)]+d(x)u(r-u-v)=0,$$

において $x=L$ とすると, $f(L)=0$ より

$$Dd(L)f_x(L)+d(L)u(L)\Big(r-u(L)-v(L)\Big)=0,$$

ゆえに

$$f_x(L) < 0.$$

を得る．したがって L の十分近くで微分積分学の基本定理より

$$f(x) > 0, x \in (L-\delta, L).$$

が導かれる．一方で (40) の g の式は次であった．

$$\frac{d_x(x)}{d(x)} g + g_x + \beta \frac{d_x(x)}{d(x)} v + v(r-u-v) = 0,$$

x で微分すると，

$$\Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x g + \Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big) g_x + g_{xx} + \beta \Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x v + \beta \frac{d_x(x)}{d(x)} v_x + v_x(r-u-v) + v(-u_x - v_x) = 0,$$

を得る．ゆえに $x = L$ とすると，$g(L) = g_x(L) = 0$ より

$$g_{xx}(L) + \beta \Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x (L) v(L) + \Big\{\beta \frac{d_x(x)}{d(x)}(L) + \Big(r - u(L) - v(L)\Big) - v(L)\Big\} v_x(L) = 0,$$

となる．ここで (43) 式より

$$g_{xx}(L) + \beta \Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x (L) v(L) - v(L) v_x(L) = 0.$$

を得る．$Dv_x(L) - \beta v(L) = 0$, $\left(\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)_x \leq 0$ より

$$g_{xx}(L) > 0.$$

よって L の十分近くで，$g_{xx}(x) > 0$ である．ゆえに微分積分学の基本定理より L の十分近くで

$$g_x(x) < 0.$$

$g(L) = 0$ かつ L の十分近くで $g_x(x) < 0$ より

$$g(x) > 0, x \in (L-\delta, L).$$

が導かれる．しかしこれは **Claim 1** より矛盾．
以上から **Claim 2**. の主張が言える． □

ここで **補題 5.1** の 1 より $[y_1, y_2] = [0, L]$ とすると

$$\int_0^L d(x) u_x v dx + \int_0^L d_x u v dx = 0,$$

よって $u_x = uT$, $d_x \leq, \not\equiv 0$ であるから

$$\int_0^L d_x uvdx < 0,$$

より

$$\int_0^L d(x)uTvdx > 0.$$

を得る. ここで **補題 5.1** の 2 より $[y_1, y_2] = [0, L]$ とすると

$$\frac{\beta}{D}\int_0^L d(x)(Dv_x - \beta v)u\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx + \beta\int_0^L d_x uv\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx = 0,$$

を得る. よって $Dv_x - \beta v = Dv(S(x) - \frac{\beta}{D})dx$, $d_x \leq, \not\equiv 0$ より

$$\int_0^L d_x uv\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx < 0,$$

を得る. ゆえに,

$$\int_0^L d(x)Dv(S - \frac{\beta}{D})u\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx > 0.$$

を得る. $S(0) = S(L) = \frac{\beta}{D}$ より, ある $x_0 \in (0, L)$ が存在して次がいえる.

$$S(x_0) - \frac{\beta}{D} > 0.$$

一方で **Claim 2**. より

$$S(x) - \frac{\beta}{D} < 0, x \in (L - \delta, L)$$

であるから L に一番近い $S(x) - \frac{\beta}{D}$ の極大値をとる点を z_1, 零点を z_2 とおくとき次を得る (ただし $z_1 < z_2$).

$$S(z_2) = \frac{\beta}{D} \Longrightarrow Dv_x(z_2) - \beta v(z_2) = 0.$$

Claim 3. ある $w \in (z_2, L)$ が存在して,

$$T(w) > 0.$$

証明. 背理法で示す. すなわち任意の $w \in (z_2, L)$ に対し $T(w) \leq 0$ とする. このとき **補題 5.1** の 1 より $[y_1, y_2] = [z_2, L]$ とすると

$$\beta\int_{z_2}^L d(x)u_x vdx + \beta\int_{z_2}^L d_x uvdx = D\big[d(x)u_x v\big]_{z_2}^L - \big[d(x)(Dv_x - \beta v)u\big]_{z_2}^L,$$

を得る. 今 $u_x = uT$ より

$$\beta\int_{z_2}^{L} d(x)u_x v dx + \beta\int_{z_2}^{L} d_x uv dx = \beta\int_{z_2}^{L} d(x)uTv dx + \beta\int_{z_2}^{L} d_x uv dx < 0.$$

を得るので,(左辺) < 0 である. 一方で $T(z_2) \leq 0$ より

$$(\text{右辺}) = -Dd(z_2)T(z_2)u(z_2)v(z_2),$$

を得る. ゆえに (右辺) ≥ 0 よって矛盾. □

Claim 4.

$$T(z_1) < 0.$$

証明. 背理法で示す. すなわち $T(z_1) \geq 0$ とする. また $S(x)$ は z_1 で正の極大値をとる. しかしこれは **補題 5.2** の 2 に矛盾する. □

Claim 5.

$$T(z_2) \geq 0 \text{ ならば } T_x(z_2) \geq 0.$$

証明. 背理法で示す. もし $T_x(z_2) < 0$ とすると, ある $w \in (z_1, z_2)$ が存在して $T(x)$ は正の極大値を持つ. また区間 (z_1, z_2) で $S(x) > 0$ であるから **補題 5.2** の 1 に矛盾する. □

Claim 6. $\delta_2 := \max_{0\leq x\leq L}\Big(-\dfrac{d_x(x)}{d(x)}\Big) < \dfrac{4\beta}{D}$ ならば

$$T(z_2) < 0.$$

証明. 背理法で示す. すなわち $T(z_2) \geq 0$ とする. ここで **補題 5.3** で $x = z_2$ とすると

$$-D(T_x(z_2)+T^2(z_2))-D\frac{d_x(z_2)}{d(z_2)}T(z_2) = -D(S_x(z_2)+S^2(z_2))+\beta S(z_2)-D\frac{d_x(z_2)}{d(z_2)}S(z_2).$$

よって **Claim 5** より $T_x(z_2) \geq 0$ であり,

$$S(z_2) = 0,\ S_x(x) \leq 0, \quad x \in [z_1, z_2].$$

であるから,

$$-DT^2(z_2) - D\frac{d_x(z_2)}{d(z_2)}T(z_2) + \beta\frac{d_x(z_2)}{d(z_2)} \geq 0, \iff T^2(z_2) \leq -\frac{d_x(z_2)}{d(z_2)}\Big(T(z_2) - \frac{\beta}{D}\Big).$$

を得る. 仮定より $-\dfrac{d_x(z_2)}{d(z_2)} \geq 0$ が言える.

Case 1. $-\dfrac{d_x(z_2)}{d(z_2)} > 0.$

δ_2 の仮定より次が成り立つ.

$$T^2(z_2) \le \delta_2\Big(T(z_2) - \frac{\beta}{D}\Big).$$

ここで $x = T(z_2)$ とおくと $x^2 \le \delta_2\Big(x - \dfrac{\beta}{D}\Big)$ となる. ここで

$$x^2 - \delta_2\Big(x - \frac{\beta}{D}\Big) \le 0$$

を満たす x が存在する条件を求める. このとき

$$-\frac{\delta_2^2}{4} + \frac{\beta\delta_2}{D} \le 0 \Longrightarrow \delta_2 \ge \frac{4\beta}{D}$$

であるから δ_2 の仮定に反しこれを満たす x は存在しない. したがって $T(z_2)$ は存在しないので矛盾.

Case 2. $-\dfrac{d_x(z_2)}{d(z_2)} = 0.$

補題 5.3 で $x = z_2$ とする. このとき $S(z_2) = \dfrac{\beta}{D},\ T_x(z_2) \ge 0,\ S_x(x) \le 0\ (x \in [z_1, z_2])$ であるから次を得る.

$$-DT_x(z_2) - DT^2(z_2) = -DS_x(z_2),$$

今 $T(z_2) \ge 0$ より $T(z_2) > 0$ とすると,

$$0 > -DT_x(z_2) - DT^2(z_2) = -DS_x(z_2) \ge 0.$$

より矛盾. また $T(z_2) = 0$ とすると $T_x(z_2) \ge 0,\ S_x(z_2) \le 0$ より $T_x(z_2) = S_x(z_2) = 0$ を得る.(39) で S に関する式

$$-DS_{xx} + \Big[\beta - 2DS - D\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big]S_x + uT + vS = D\Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x S,$$

で $x = z_2$ とすると,

$$-DS_{xx}(z_2) + v(z_2)S(z_2) = \beta\Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x(z_2),$$

となるので

$$S_{xx}(z_2) = \frac{1}{D}v(z_2)S(z_2) - \frac{\beta}{D}\Big(\frac{d_x(x)}{d(x)}\Big)_x(z_2) > 0,$$

を得る. $S_x(z_2) = 0$ より z_2 の十分近くでは $S_x > 0$ である. 一方で $S(x) < \dfrac{\beta}{D}\ \big(x \in (z_2, L)\big)$ かつ $S(z_2) = \dfrac{\beta}{D}$ より z_2 の十分近くで $S_x < 0$ を得る. よって矛盾. 以上から 2 つの場合において矛盾が分かったので **Claim 6** の結論を得る. $\square$

ここで $T(z_2)<0,\ T(w)>0,\ (w\in(z_2,L))$ より, ある $z_3\in(z_2,w)$ が存在して

$$T(z)<0,\ \big(z\in(z_2,z_3)\big),\ T(z_2)<0,\ T(z_3)=0.$$

を得る.

Claim 7. 最終的な結論を導く

証明. ここで $S(z_3)<\dfrac{\beta}{D}$ であった. ゆえに **補題 5.1** の 2 より $[y_1,y_2]=[z_2,z_3]$ とすると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -\frac{\beta}{D}\int_{z_2}^{z_3} d(x)(S-\frac{\beta}{D})uv\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx-\beta\int_{z_2}^{z_3} d_x uv\exp(-\frac{\beta}{D}x)dx>0,\\
(\text{右辺}) &= \Big[d(x)(S-\frac{\beta}{D})uv\exp(-\frac{\beta}{D}x)\Big]_{z_2}^{z_3}-\Big[Dd(x)Tuv\exp(-\frac{\beta}{D}x)\Big]_{z_2}^{z_3},\\
&= d(z_3)\{S(z_3)-\frac{\beta}{D}\}u(z_3)v(z_3)\exp(-\frac{\beta}{D}z_3)+Dd(z_2)T(z_2)u(z_2)v(z_2)\exp(-\frac{\beta}{D}z_2),\\
&<0.
\end{aligned}$$

となり矛盾. □

ゆえに **Claim 1〜7**. より矛盾. すなわち共存状態は存在しないことが示される. □

6 Appendix

主定理 1.2 の $(\widetilde{u},0)$ $(0,\widetilde{v})$ のまわりの安定不安定性を示すにあたり, 省略した証明をここで行う. ([2] 参照)

6.1 $(\widetilde{u},0)$ のまわりの線形化固有値問題

次の 2 つの式が得られていた.

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)\varphi_x]_x-(r-2\widetilde{u})\varphi(x)=\lambda\varphi(x)-\widetilde{u}\psi(x),\\ \varphi_x(0)=\varphi_x(L)=0.\end{cases}\tag{45}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)p(x)\psi_x]_x-\beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}p(x)\psi(x)=\lambda p(x)\psi(x),\\ \psi_x(0)=\psi_x(L)=0.\end{cases}\tag{46}$$

このとき $(\widetilde{u},0)$ のまわりの線形化固有値問題 とは (45), (46) を満たす λ, $(\varphi,\psi)\not\equiv(0,0)$ を見つける問題である. このとき次が成り立つ.

補題 6.1. (46) で第一固有値 $\lambda_1>0$ ならば $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ すなわち $(\widetilde{u},0)$ は安定.

証明. 作用素 L_1, L_2 を次のように定める.

$$L_1\psi := -\frac{1}{d(x)p(x)}[Dd(x)p(x)\psi_x]_x - \beta\frac{d_x(x)}{d(x)}\psi,$$
$$L_2\varphi := -\frac{1}{d(x)}[Dd(x)\varphi_x]_x - (r - 2\widetilde{u})\varphi.$$

このとき整理すると次を得る.

$$\begin{cases} L_1\psi = \lambda\psi, \\ L_2\varphi = \lambda\varphi - \widetilde{u}\psi. \end{cases}$$

Claim 1. L_2 の第一固有値が正である

$L_2\varphi = \mu_1\varphi$ とする. このとき (μ_1, φ) を L_2 の第一固有値, 第一固有関数のペアとする. ここで

$$-\frac{1}{d(x)}[Dd(x)\varphi_x]_x - (r - 2\widetilde{u})\varphi = \mu_1\varphi,$$

これに $d(x)\widetilde{u}$ をかけて $[0, L]$ 積分すると,

$$-\int_0^L [Dd(x)\varphi_x]_x\widetilde{u}dx - \int_0^L d(x)\widetilde{u}(r - 2\widetilde{u})\varphi dx = \mu_1\int_0^L d(x)\widetilde{u}\varphi dx,$$

を得る. また次のように変形する.

$$-\int_0^L [Dd(x)\widetilde{u}_x]_x\varphi dx - \int_0^L d(x)\widetilde{u}(r - \widetilde{u})\varphi dx + \int_0^L d(x)\widetilde{u}^2\varphi dx = \mu_1\int_0^L d(x)\widetilde{u}\varphi dx,$$

このとき (15) より次を得る.

$$\int_0^L d(x)\widetilde{u}^2\varphi dx = \mu_1\int_0^L d(x)\widetilde{u}\varphi dx,$$

したがって $\mu_1 > 0$ を得る. よって L_2 の第一固有値は正であるから [8] より

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_i \to \infty.$$

が成り立つ.

Claim 2. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ すなわち $(\widetilde{u}, 0)$ は安定である.

背理法で示す. そうでないとすると, ある固有値 λ が存在して, $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ である. これに対し $(\varphi, \psi) \not\equiv (0, 0)$ が存在する. ここで $\psi \not\equiv 0$ とすると λ は実数である. したがって

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda \leq 0.$$

となり矛盾する. したがって $\psi \equiv 0$ である. また $\varphi \not\equiv 0$ とすると $(L_2 - \lambda)\varphi = 0$ である. $L_2 - \lambda_1$ の固有値は

$$0 < \mu_1 - \lambda_1 < \mu_2 - \lambda_1 < \cdots < \mu_i - \lambda_1 \to \infty.$$

より全て正である. **補題 2.1** より $\varphi \in H^2([0, L])$ が存在するが, $(L_2 - \lambda)\varphi = 0$ より $\varphi \equiv 0$ となる. したがって $\varphi \not\equiv 0$ に矛盾する. ゆえに $(\varphi, \psi) \equiv (0, 0)$ となるので最初の仮定に反する. 以上から $(\widetilde{u}, 0)$ は安定である. □

6.2 $(0, \widetilde{v})$ のまわりの線形化固有値問題

次の 2 式が得られていた.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)\phi_x]_x - (r - \widetilde{v})\phi = \mu\phi, \\ \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{d(x)}[Dd(x)p(x)\varphi_x]_x - p(x)\varphi\{(r + \beta\dfrac{d_x(x)}{d(x)}) - 2\widetilde{v}\} = \mu p(x)\varphi - \widetilde{v}\phi, \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0. \end{cases} \tag{48}$$

このとき $(0, \widetilde{v})$ のまわりの線形化固有値問題 とは (47), (48) を満たす μ, $(\phi, \varphi) \not\equiv (0, 0)$ を見つける問題である. このとき次が成り立つ.

補題 6.2. (47) で第一固有値 $\mu_1 < 0$ ならば $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ すなわち $(0, \widetilde{v})$ は不安定.

証明. 作用素 L_1, L_2 を次のように定める.

$$\begin{aligned} L_1\phi &:= -\frac{1}{d(x)}[Dd(x)\phi_x]_x - (r - \widetilde{v})\phi, \\ L_2\varphi &:= -\frac{1}{d(x)p(x)}[Dd(x)p(x)\varphi_x]_x - \varphi\{(r + \beta\frac{d_x(x)}{d(x)}) - 2\widetilde{v}\}. \end{aligned}$$

このとき整理すると次を得る.

$$\begin{cases} L_1\phi = \mu\phi, \\ L_2\varphi = \mu\varphi - \dfrac{1}{p(x)}\widetilde{v}\phi. \end{cases}$$

このとき次の主張が成り立つ.

Claim 1. L_2 の第一固有値が正である

$L_2\varphi=\delta_1\varphi$ とする. このとき (δ_1,φ) を L_2 の第一固有値, 第一固有関数のペアとする. ここで

$$-\frac{1}{d(x)}[Dd(x)p(x)\varphi_x]_x-p(x)\varphi\left\{\left(r+\beta\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)-2\widetilde{v}\right\}=\delta_1\varphi,$$

であるから $d(x)\widetilde{v}$ をかけて $[0,L]$ 積分すると,

$$-\int_0^L[Dd(x)p(x)\varphi_x]_x\widetilde{v}dx-\int_0^L d(x)p(x)\widetilde{v}\left\{\left(r+\beta\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)-2\widetilde{v}\right\}\varphi dx=\delta_1\int_0^L d(x)\widetilde{v}\varphi dx,$$

を得る. また次のように変形する.

$$\begin{aligned}-\int_0^L[Dd(x)p(x)\widetilde{v}_x]_x\varphi dx-\int_0^L d(x)p(x)\widetilde{v}\left\{\left(r+\beta\frac{d_x(x)}{d(x)}\right)-\widetilde{v}\right\}\varphi dx\\+\int_0^L d(x)p(x)\widetilde{v}^2\varphi dx=\delta_1\int_0^L d(x)\widetilde{v}\varphi dx,\end{aligned}$$

このとき (18) より次を得る.

$$\int_0^L d(x)p(x)\widetilde{v}^2\varphi dx=\delta_1\int_0^L d(x)\widetilde{v}\varphi dx,$$

したがって $\delta_1>0$ を得る. よって L_2 の第一固有値は正であるから [8] より

$$0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_i\to\infty.$$

が成り立つ.

Claim 2. $\mathrm{Re}(\mu)<0$ すなわち $(0,\widetilde{v})$ は不安定.

ここで次を満たす φ が存在するか考察する.

$$\begin{cases}L_1\phi=\mu_1\phi,\\ L_2\varphi=\mu_1\varphi-\dfrac{1}{p(x)}\widetilde{v}\phi.\end{cases}$$

今 **Claim 1** より L_2 の第一固有値は正で

$$0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_i\to\infty,$$

が成り立っていた. 今 $(L_2-\mu_1)\varphi=-\dfrac{1}{p(x)}\widetilde{v}\phi$ であり, $\mu_1<0$ であるから. $L_2-\mu_1$ の固有値は

$$0<\delta_1-\mu_1<\delta_2-\mu_1<\cdots<\delta_i-\mu_1\to\infty.$$

となり全て正である. したがって **補題 2.1** より $\varphi\in H^2([0,L])$ が存在する. よって (47), (48) として,

$$\mu=\mu_1<0,\quad (\phi,\varphi)\not\equiv(0,0)$$

を得る. [8] より固有値は実数であるから, $\mathrm{Re}(\mu)<0$ を得る. したがって $(0,\widetilde{v})$ は不安定.

7　謝辞

本研究は，著者が首都大学東京大学院理工学研究科数理情報科学専攻博士前期課程在学中に，同大学院理工学研究科数理情報科学専攻の倉田和浩教授の指導のもとに行ったものである．適切な助言を賜り，熱心に指導してくださった倉田和浩教授に深く感謝いたします．また，ご多忙の中，本論文の副査を快諾していただきました吉富和志教授と澤野嘉宏准教授に感謝いたします．

参考文献

[1] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer Verlag, 2011.

[2] X. Chen, R. Hambrock, Y. Lou, Evolution of conditional dispersal : a reaction-diffusion-advection model, J. Math. Biol. **57**, 627-658 (2008).

[3] K. -Y. Lam, D. Munther, A remark on the global dynamics of competitive systems on ordered Banach spaces, Proc. Am. Math. Soc. **144**, 1153-1159 (2016).

[4] Y. Lou, D. Xiao, P. Zhou, Qualitative analysis for a Lotka-Volterra competiton system in advective homogeneous environment, Discrete and Continuous Dynamical Systems A **36**, 953-969 (2016).

[5] 村田實・倉田和浩,『偏微分方程式 1』（岩波書店, 2003）.

[6] D. H. Sattinger, Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J. **21** (1971/72), 979-1000.

[7] H. Smith, Monotone Dynamical System An Introduction to the Theory of competitive and Cooperative Systems, Math. Surveys Monogr. **41** Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1995.

[8] 柳田英二,『反応拡散方程式』（東京大学出版会, 2015）.

[9] X. -Q. Zhao, P. Zhou, On a Lotka-Volterra competiton model:the effects of advection and spatial variation, Calc. Var. Partial Differential Equations, 55-73 (2016).